

## Supplementary Materials

In this section, appendix for Hierarchical Quasi Fractional Gradient Descent Method for Parameter Estimation of Nonlinear ARX Systems using Key Term Separation Principle is given in terms of Tables.

Results of fitness adaptation of the HQFGD are given in Supplementary Tables S1, S2 and S3 for 0.02, 0.09 and 0.2 noise level respectively.

**Table S1.** Fitness adaptation of the HQFGD for 0.02 noise level and 0.0005 step size.

$t$	$\mu = 0.7$	$\mu = 0.8$	$\mu = 0.9$	$\mu = 1$	$\mu = 1.1$	$\mu = 1.2$
1000	0.46252	0.46203	0.47164	0.48775	0.50968	0.53759
2000	0.23824	0.24016	0.24891	0.26302	0.28297	0.31001
3000	0.14211	0.14555	0.15151	0.16019	0.17255	0.19009
4000	0.10153	0.10505	0.10975	0.11609	0.12474	0.13669
5000	0.07699	0.08021	0.08451	0.09029	0.09806	0.10844
6000	0.05841	0.06123	0.06511	0.07042	0.07757	0.08710
7000	0.04508	0.04753	0.05103	0.05590	0.06258	0.07155
8000	0.03425	0.03633	0.03938	0.04373	0.04979	0.05810
9000	0.02561	0.02734	0.02995	0.03373	0.03910	0.04661
10000	0.01964	0.02109	0.02331	0.02659	0.03132	0.03806
11000	0.01467	0.01585	0.01770	0.02046	0.02452	0.03042
12000	0.01130	0.01227	0.01382	0.01616	0.01965	0.02484
13000	0.00850	0.00926	0.01050	0.01241	0.01530	0.01970
14000	0.00638	0.00699	0.00799	0.00955	0.01196	0.01569
15000	0.00474	0.00523	0.00604	0.00732	0.00932	0.01249
16000	0.00373	0.00412	0.00477	0.00582	0.00749	0.01017
17000	0.00283	0.00315	0.00368	0.00455	0.00594	0.00823
18000	0.00218	0.00243	0.00286	0.00355	0.00470	0.00660
19000	0.00172	0.00191	0.00224	0.00280	0.00373	0.00532
20000	0.00122	0.00137	0.00164	0.00210	0.00287	0.00421
21000	0.00101	0.00113	0.00134	0.00170	0.00233	0.00343
22000	0.00078	0.00087	0.00104	0.00134	0.00186	0.00279
23000	0.00067	0.00074	0.00086	0.00109	0.00151	0.00227
24000	0.00057	0.00062	0.00072	0.00090	0.00123	0.00185
25000	0.00027	0.00031	0.00039	0.00054	0.00082	0.00135
26000	0.00029	0.00029	0.00031	0.00039	0.00057	0.00099
27000	0.00045	0.00046	0.00048	0.00053	0.00067	0.00099
28000	0.00041	0.00041	0.00040	0.00041	0.00047	0.00070
29000	0.00045	0.00044	0.00044	0.00044	0.00048	0.00063
30000	0.00036	0.00035	0.00033	0.00030	0.00030	0.00041

**Table S2.** Fitness adaptation of the HQFGD for 0.09 noise level and 0.0005 step size.

$t$	$\mu = 0.7$	$\mu = 0.8$	$\mu = 0.9$	$\mu = 1$	$\mu = 1.1$	$\mu = 1.2$
<b>1000</b>	0.46238	0.46196	0.47162	0.48776	0.50970	0.53761
<b>2000</b>	0.23884	0.24080	0.24960	0.26374	0.28372	0.31077
<b>3000</b>	0.14206	0.14551	0.15148	0.16019	0.17258	0.19016
<b>4000</b>	0.10093	0.10445	0.10916	0.11550	0.12415	0.13610
<b>5000</b>	0.07699	0.08020	0.08450	0.09029	0.09805	0.10844
<b>6000</b>	0.05893	0.06172	0.06559	0.07089	0.07804	0.08757
<b>7000</b>	0.04519	0.04762	0.05112	0.05600	0.06268	0.07168
<b>8000</b>	0.03469	0.03675	0.03979	0.04413	0.05018	0.05848
<b>9000</b>	0.02600	0.02771	0.03031	0.03407	0.03942	0.04692
<b>10000</b>	0.01994	0.02137	0.02359	0.02686	0.03158	0.03831
<b>11000</b>	0.01503	0.01620	0.01803	0.02078	0.02483	0.03072
<b>12000</b>	0.01180	0.01275	0.01427	0.01659	0.02006	0.02522
<b>13000</b>	0.00953	0.01026	0.01146	0.01332	0.01616	0.02050
<b>14000</b>	0.00735	0.00793	0.00890	0.01043	0.01280	0.01648
<b>15000</b>	0.00551	0.00598	0.00677	0.00802	0.01000	0.01314
<b>16000</b>	0.00485	0.00521	0.00582	0.00681	0.00842	0.01105
<b>17000</b>	0.00363	0.00392	0.00443	0.00526	0.00663	0.00888
<b>18000</b>	0.00288	0.00311	0.00352	0.00421	0.00534	0.00723
<b>19000</b>	0.00254	0.00271	0.00302	0.00355	0.00445	0.00600
<b>20000</b>	0.00188	0.00201	0.00224	0.00265	0.00338	0.00468
<b>21000</b>	0.00169	0.00179	0.00196	0.00228	0.00286	0.00393
<b>22000</b>	0.00137	0.00144	0.00158	0.00184	0.00232	0.00321
<b>23000</b>	0.00141	0.00145	0.00154	0.00171	0.00205	0.00275
<b>24000</b>	0.00138	0.00141	0.00147	0.00159	0.00185	0.00240
<b>25000</b>	0.00066	0.00067	0.00069	0.00077	0.00097	0.00145
<b>26000</b>	0.00111	0.00108	0.00104	0.00098	0.00096	0.00112
<b>27000</b>	0.00144	0.00143	0.00142	0.00142	0.00146	0.00162
<b>28000</b>	0.00147	0.00145	0.00140	0.00134	0.00127	0.00126
<b>29000</b>	0.00155	0.00154	0.00151	0.00146	0.00141	0.00138
<b>30000</b>	0.00131	0.00127	0.00121	0.00113	0.00102	0.00090

**Table S3.** Fitness adaptation of the HQFGD for 0.2 noise level and 0.0005 step size.

$t$	$\mu = 0.7$	$\mu = 0.8$	$\mu = 0.9$	$\mu = 1$	$\mu = 1.1$	$\mu = 1.2$
<b>1000</b>	0.45840	0.45801	0.46778	0.48404	0.50611	0.53418
<b>2000</b>	0.23566	0.23767	0.24654	0.26073	0.28075	0.30785
<b>3000</b>	0.13826	0.14164	0.14758	0.15624	0.16857	0.18608
<b>4000</b>	0.09641	0.09993	0.10457	0.11078	0.11925	0.13096
<b>5000</b>	0.07465	0.07775	0.08193	0.08757	0.09515	0.10532
<b>6000</b>	0.05821	0.06089	0.06462	0.06973	0.07666	0.08593
<b>7000</b>	0.04352	0.04588	0.04927	0.05401	0.06053	0.06932
<b>8000</b>	0.03431	0.03627	0.03918	0.04333	0.04915	0.05716
<b>9000</b>	0.02572	0.02734	0.02982	0.03342	0.03855	0.04576
<b>10000</b>	0.01961	0.02096	0.02308	0.02621	0.03074	0.03723
<b>11000</b>	0.01507	0.01614	0.01787	0.02048	0.02433	0.02998
<b>12000</b>	0.01257	0.01340	0.01477	0.01689	0.02011	0.02496
<b>13000</b>	0.01196	0.01254	0.01355	0.01517	0.01771	0.02167
<b>14000</b>	0.00943	0.00993	0.01078	0.01213	0.01426	0.01764
<b>15000</b>	0.00774	0.00810	0.00875	0.00981	0.01155	0.01438
<b>16000</b>	0.00830	0.00854	0.00898	0.00973	0.01103	0.01325
<b>17000</b>	0.00608	0.00628	0.00665	0.00731	0.00845	0.01041
<b>18000</b>	0.00465	0.00482	0.00517	0.00578	0.00680	0.00852
<b>19000</b>	0.00489	0.00500	0.00521	0.00560	0.00631	0.00763
<b>20000</b>	0.00417	0.00425	0.00439	0.00466	0.00518	0.00621
<b>21000</b>	0.00355	0.00360	0.00369	0.00389	0.00431	0.00516
<b>22000</b>	0.00315	0.00318	0.00326	0.00343	0.00376	0.00444
<b>23000</b>	0.00351	0.00352	0.00353	0.00359	0.00376	0.00420
<b>24000</b>	0.00361	0.00362	0.00363	0.00366	0.00377	0.00409
<b>25000</b>	0.00199	0.00196	0.00193	0.00189	0.00190	0.00207
<b>26000</b>	0.00358	0.00351	0.00340	0.00323	0.00301	0.00276
<b>27000</b>	0.00400	0.00396	0.00391	0.00384	0.00376	0.00374
<b>28000</b>	0.00436	0.00433	0.00422	0.00405	0.00383	0.00357
<b>29000</b>	0.00433	0.00430	0.00422	0.00410	0.00393	0.00371
<b>30000</b>	0.00373	0.00363	0.00348	0.00327	0.00301	0.00268